doi: 10.3969/j.issn.1007-855x.2011.02.015

关于 Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$ 的两个问题

樊旭辉，朱　熙，闫欣荣
(武警工程学院 基础部，陕西 西安 710086)

摘要：对于任意的正整数 n，Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid m!!$，其中 $m!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\cdots m, 2\nmid n \\ 2\cdot 4\cdot 6\cdots m \mid n \end{cases}$. 即就是 $sdf(n) = \min\{m: n \mid m!!, m\in N\}$. 主要目的是通过研究 $\ln sdf(n)$ 的值的分布性质，从而将 Felice Russo 在文献[1]中提出的两个极限问题彻底解决.

关键词：Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$；极限；渐近公式
中图分类号：O156.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1007-855X(2011)02-0071-04

On Two Questions of Smarandache Double Factorial Function

FAN Xu-hui, ZHU Xi, YAN Xin-rong
(Foundation Department, Engineering College of Armed Police Force, Xi'an 710086, China)

Abstract: For any positive integer n, the Smarandache double factorial sdf(n) is defined as the smallest integer m such that $n \mid m!!$, where $m!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\cdots m, 2\nmid n \\ 2\cdot 4\cdot 6\cdots m \mid n \end{cases}$. That is $sdf(n) = \min\{m: n \mid m!!, m\in N\}$. The main purpose of this paper is to study the arithmetical properties of $\ln sdf(n)$ by the elementary methods, and to solve two problems which were proposed by Felice Russo in reference [1].

Key words: Smarandache double factorial function; limit; asymptotic formula

0 引言

对于任意正整数 n，Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$ 定义为最小的正整数 m，使得 $n \mid m!!$，其中 $m!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\cdots m, 2\nmid n \\ 2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots m \mid n \end{cases}$，即就是 $sdf(n) = \min\{m: n \mid m!!, m\in N\}$. 例如：$sdf(1) = 1$，$sdf(2) = 2$，$sdf(3) = 3$，$sdf(4) = 4$，$sdf(5) = 5$，$sdf(6) = 6$，$sdf(7) = 7$，$sdf(8) = 4$，⋯.

关于 $sdf(n)$ 的性质，有不少学者进行了研究，得到了许多有重要理论价值的研究成果[1-3]. Felice Russo 在文献[1]中对函数进行了系统研究，得到了一些关于 $sdf(n)$ 的基本性质. 同时，Felice Russo 在文献[1]中提出如下问题：

问题1：计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n}$；

问题2：计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{sdf(n)}{\theta(n)}$，其中 $\theta(n) = \sum\limits_{k\le n}\ln sdf(k)$.

本文的主要目的是通过研究 $\ln sdf(n)$ 的值的分布性质，从而将 Felice Russo 在文献[1]中提出的两个极限问题彻底解决，具体说就是证明下面的结论：

收稿日期：2010-05-04. 基金项目：国家自然科学基金资助项目(项目编号：10671155).
作者简介：樊旭辉(1975-)，男，硕士，讲师. 主要研究方向：数论及其应用研究. **E-mail**: xuhuifan2050@163.com

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　　http://www.cnki.net

定理1 对于任意实数 $x \geqslant 2$,有渐近公式: $\sum_{n \leqslant x} \ln sdf(n) = x\ln x + O(x)$.

定理2 对于任意的正整数 $n > 1$,有估计式: $\frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$

推论1 对于任意的正整数 $n > 1$,有极限: $\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} = 1$.

定理3 对于任意的正整数 $n > 1$,有估计式: $\frac{sdf(n)}{\theta(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right) = 1$.

推论2 对于任意的正整数 $n > 1$,有极限: $\lim_{n \to \infty} \frac{sdf(n)}{\theta(n)} = 0$.

1 引理及其证明

为了完成定理的证明,我们需要如下的引理:

引理1[4] 对于任意的正整数 $n > 1$,令 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式,如果 $\alpha_i \geqslant 2(i = 1,2,\cdots,k)$,那么称 n 为 square - full 数. 令 $A_2(x)$ 表示不超过 x 的 square - full 数的集合,有渐近公式:

$$A_2(x) = \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\zeta(3)} x^{1/2} + \frac{\zeta\left(\frac{2}{3}\right)}{\zeta(2)} x^{1/3} + O(x^{1/6} \exp(-C \ln^{3/5} x (\zeta(s) \ln\ln x)^{-1/5})) \tag{1}$$

其中 $C > 0$ 为常数,$\zeta(s)$ 为 Riemann - zeta 函数.

引理2 设 p 是任意素数,k 是任意正整数,则对任意实数 $x \geqslant 2$,有渐近公式:

$$\sum_{\substack{pn \leqslant x \\ (p,n)=1}} \ln p = x\ln x + O(x) \tag{2}$$

证明:根据素数定理的几个不同的形式,我们有:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1), \sum_{n \leqslant x} \ln p = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right), \sum_{n \leqslant x} \frac{\ln p}{p^2} = D + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

其中 D 是可计算的正常数.

由上述渐近公式,有:

$$\sum_{\substack{pn \leqslant x \\ (p,n)=1}} \ln p = \sum_{p \leqslant x} \ln p \sum_{\substack{n \leqslant \frac{x}{p} \\ (p,n)=1}} 1 = \sum_{p \leqslant x} \ln p \left(\frac{x}{p} - \frac{x}{p^2} + O(1)\right) = x \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p} - x \sum_{p \leqslant x} \frac{\ln p}{p^2} + O\left(\sum_{p \leqslant x} \ln p\right) = x\ln x + O(x)$$

于是证明了引理2.

2 定理的证明

首先估计 $\sum_{n \leqslant x} sdf(n)$ 的上界. 事实上,由 $sdf(n)$ 的定义及 Euler 求和公式,有:

$$\sum_{n \leqslant x} \ln sdf(n) \leqslant \sum_{n \leqslant x} \ln n = x\ln x - x + O(\ln x) = x\ln x + O(x) \tag{3}$$

接下来估计 $\sum_{n \leqslant x} sdf(n)$ 的下界.

把 $[1,x]$ 中的所有正整数 n 分为 A 和 B 两个集合,其中 A 表示 $[1,x]$ 中的所有 square - full 数所构成的集合; B 表示 $[1,x]$ 中所有不属于 A 的正整数所构成的集合. 于是有:

$$\sum_{n \leqslant x} \ln sdf(n) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in A}} \ln sdf(n) + \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in B}} \ln sdf(n) \tag{4}$$

由集合 A 的定义及引理1,有:

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\ln sdf(n) \leqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\ln n \leqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\ln x = \ln x\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}1 = \ln x\cdot A_2(x) \ll \sqrt{x}\ln x \tag{5}$$

对任意的 $n\in B$，一定存在一个素数 p 满足 $p\mid n$，且 $p^2\nmid n$. 因此，由 $sdf(n)$ 的定义，有 $sdf(np)\geqslant p$. 由此可得：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\ln sdf(n) = \sum_{\substack{np\leqslant x\\ (n,p)=1}}\ln sdf(np) \geqslant \sum_{\substack{np\leqslant x\\ (n,p)=1}}\ln p \tag{6}$$

由引理 2 及(6) 式，有：

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in B}}\ln sdf(n) \geqslant x\ln x + O(x) \tag{7}$$

由(4)、(5) 和(7) 式，有：

$$\sum_{n\leqslant x}\ln sdf(n) \geqslant x\ln x + O(x) \tag{8}$$

由(3) 和(8) 式，有：

$$\sum_{n\leqslant x}\ln sdf(n) = x\ln x + O(x)$$

于是证明了定理 1.

一方面，由定理 1，有：

$$\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} \geqslant \frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln sdf(k)}{\ln n}}{n} = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\ln sdf(k)}{n\ln n} = \frac{n\ln n + O(n)}{n\ln n} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \tag{9}$$

另一方面，由 $sdf(n)$ 的定义，有：

$$\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln k}{\ln k}}{n} = \frac{n-1}{n} < 1 \tag{10}$$

结合(9) 和(10) 式，有：

$$\frac{\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{\ln sdf(k)}{\ln k}}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

于是证明了定理 2.

推论 1 可理解为定理 2 中取 $n\to\infty$ 时的极限.

由 $sdf(n)$ 的定义及定理 1，有：

$$0 < \frac{sdf(n)}{\theta(n)} \leqslant \frac{n}{\theta(n)} = \frac{n}{n\ln n + O(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \tag{11}$$

由(11) 式，有：

$$\frac{sdf(n)}{\theta(n)} = O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

于是证明了定理 3.

推论 2 可理解为定理 3 中取 $n\to\infty$ 时的极限.

3 结 语

本文通过利用初等及解析的方法研究 $\ln sdf(n)$ 的值的分布性质，从而将 Felice Russo 在文献[1] 中提出的两个极限问题彻底解决. 关于 Smarandache 双阶乘函数 $sdf(n)$ 的性质目前知之甚少，还有许多问题有待有兴趣的学者进行研究. 例如：

问题 1：求方程 $S^k(n) + Z^k(n) = sdf^k(n)$ 的所有正整数解，其中 $S(n)$ 是 Smarandache 函数(定义参阅文献[5])，$Z(n)$ 是伪 Smarandache 函数(定义参阅文献[6])，k 是任意整数.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

问题2:研究函数 $sdf[Z(n)]$ 及函数 $Z[sdf(n)]$ 的性质.

参考文献:

[1] Felice Russo. A set of new Smarandache function, sequences and conjectures in number theory [M]. USA: American research press, 2000.
[2] Le Maohua. On the Smarandache double factorial function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004: 209-228.
[3] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Spinger-Verlag, 1976.
[4] Hardy G H, Wright E M. An Introduction to Analytic Number Theory [M]. Oxford: Oxford University Press, 1981.
[5] Ashbacher C. An introduction to the Smarandache function [M]. Vail: Erhus University Press, 1995.
[6] Kenichirokk. Comment and topics on Smarandache notions and problems [M]. Vail: Erhus University Press, 1996.
[7] 潘承洞,潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海:上海科技出版社,1988.
[8] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[9] 张文鹏,等. 初等数论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,2007.

(上接第40页)

3.2 仿真试验分析

汽车蛇行试验仿真结果如图3和图4所示. 图3为汽车的侧向位移的变化曲线(黑点为标桩位置),实线是汽车车速为36 km/h的位移变化,虚线是汽车车速为70 km/h的位移变化. 由图中位移变化可知,当车速为70 km/h时,汽车在绕过最后一个标桩时失稳,造成不能及时回正;当车速低于70 km/h时,汽车处于稳定状态,汽车的行驶轨迹与设计的试验轨迹基本吻合,具有良好的追随性能.

图4是仿真过程中汽车处于稳定状态时的前轮转角、横摆角速度、侧向加速度随径向位移的变化趋势. 由图中变化趋势可知,横摆角速度的最大值为12°/s,前轮转角的最大值为76°.

4 结 论

根据本文设计的蛇行路线和仿真数据曲线可知,ADAMS/Car对汽车动力学性能能够精确仿真,因此可以在ADAMS/Car中建立汽车模型,并通过ADAMS/Car进行动力学仿真分析,对其设计参数不断修改来改善其整车性能,达到优化产品设计方案,降低成本和缩短设计周期的目的.

本文采用ADAMS中的闭环控制,今后将会利用ADAMS建立更复杂全面的模型进行研究,以拓广该项研究的价值.

参考文献:

[1] 刘文婷,王波. 基于虚拟样机技术的蛇行试验仿真分析[J]. 拖拉机与农用运输车,2010(2):35-37.
[2] 尹浩,赵又群,吴杰. 基于汽车操纵逆问题的蛇行试验分析研究[J]. 机械科学与技术,2007(12):1640-1643.
[3] 翁秀奇,陈加国. 汽车蛇行试验及数据处理[J]. 现代制造工程,2006(5):115-117.
[4] 王国强,张进平,马若丁. 虚拟样机技术及其在ADAMS上的实践[M]. 西北工业大学出版社,2002.
[5] 喻凡. 车辆动力学及其控制[M]. 北京:人民交通出版社,2004.
[6] 王树凤,张俊友,余群. 应用ADAMS设计车辆操纵稳定性试验[J]. 中国农业大学学报. 2001,6(6):81-84.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net